Les idées formulées dans ce document sont considérées comme propres à son auteur. Prière être vigileant dans la lecture. Pour ce qui est de l'exercice 3 se référer au cours du professeur N'ZI Markov2016 dans le gbaki.

Problem 1
Distribution du temps d'attente:On considère une file d'attente M/M/1 de taux d'utilisation ρ <1. On rappelle que sous l'hypothèse de régime permanent, on a les résultats suivants :

- la distribution du nombre de personnes dans le système suit une loi géométrique de paramètre $1-\rho$ (décalée de 1 car elle peut prendre la valeur 0);
- l'espérance du nombre de personnes dans le système est $L = \frac{\rho}{1-\rho}$;
- l'espérance du nombre de personnes en attente est $L_q = L - (1-\pi_0) = \frac{\rho^2}{1-\rho}$.

On désigne par T_q la variable aléatoire représentant le temps d'attente et par T celle représentant le temps de séjour dans le système.

Problem 1-1
Déterminer la loi du temps de service de n clients.

Proof: Le temps de service S_i d'un client i est une variable aléatoire de loi exponenetielle de paramètre μ. Donc $S_i \rightsquigarrow exp(\mu)$.
Ainsi le temps de service de n clients S^n suivra une loi gamma de paramètres n et μ car les variables aléatoires S_i sont deux à deux indépendantes. D'où $S^n \rightsquigarrow \Gamma(n,\mu)$.

Problem 1-2
En utilisant la formule des probabilités totales, donner une expression de la fonction de répartition de T_q et en déduire sa densité.

Proof: Soit F_q la fonction de répartition de la va Tq et f_q sa densité.
Soit $t>0$. On a $F_q(t) = \mathbb{P}(T_q \leq t)$. Les ensembles $\{\{N=k\}; k \in \mathbb{N}\}$ forment une partition de $\mathbb{N}$; où N est la va représentant le nombre de clients présents dans le système.
En utilisant la formule des probabilités totales on a :
$F_q(t) = \mathbb{P}(T_q \leq t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T_q \leq t|N=k)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T_q \leq t|N=k)\mathbb{P}(N+1=k+1)$.
Il faut noter que le temps de services de n clients présentes dans le système dans une file d'attente correspond au temps d'attente d'un client qui trouve avant lui n-1 personnes.
Ainsi donc on pourrait écrire que

$$\mathbb{P}(T_q \leq t|N=k) = \mathbb{P}(S^{k-1} \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mu^{k-1}s^{k-2}\exp(-\mu s)}{(k-2)!}ds = \int_{0}^{t} \frac{\mu^{k-1}s^{k-2}\exp(-\mu s)}{(k-2)!}ds \ ; \ k>1 \ (1)$$

De même on a $\mathbb{P}(N+1=k+1) = \rho^k(1-\rho)$ (2) car $N+1 \rightsquigarrow G(1-\rho)$.

Notons que pour k=0 on a $\mathbb{P}(T_q \leq t|N=k) = 0$ car l'évènement en question est incertain. (3)

Notons que pour k=1 on a $\mathbb{P}(T_q \leq t|N=k) = 1$ car le temps
d'attente du client est nul étant donné qu'il est seul dans le système. (4)

En combinant (1)-(4) on a:

$$F_q(t) = \rho(1-\rho) + \sum_{k>1;k\in\mathbb{N}} \rho^k(1-\rho)\int_0^t \frac{\mu^{k-1}s^{k-2}\exp(-\mu s)}{(k-2)!}ds = \rho(1-\rho) + \rho^2(1-\rho)\mu \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_0^t \frac{\rho^k\mu^k s^k \exp(-\mu s)}{k!}ds.$$

En permutant la somme et l'intégrale (possible à cause de la positivité des termes), on a

$F_q(t) = \rho(1-\rho) + \rho^2(1-\rho)\mu \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\rho^k \mu^k s^k \exp(-\mu s)}{k!} ds = \rho(1-\rho) + \rho^2(1-\rho)\mu \int_0^t \exp(-\mu s) \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda s)^k}{k!} ds$

$F_q(t) = \rho(1-\rho) + \rho^2 \int_0^t (-\mu)\exp(-\mu s)\exp(\lambda s) ds$ car $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Ainsi on a $F_q(t) = \rho(1 - \exp -(\mu-\lambda)t)1_{t>0}$.

La densité de T_q est donc $f_q(t) = \rho((\mu-\lambda)\exp -(\mu-\lambda)t)1_{t>0}$.

Problem 1-3
Déterminer $W_q = \mathbb{E}(T_q)$.

Proof: Notons que $f_q(t) = \rho((\mu-\lambda)\exp -(\mu-\lambda)t)1_{t>0} = \rho f_{q/\rho}(t)$ avec $f_{q/\rho}$ la densité d'une va de loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.

On déduit alors que $\mathbb{E}(T_q) = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$

Problem 1-4
Déterminer la loi de T et $W = \mathbb{E}(T)$.

Proof: Le temps de séjour d'un client correspond à la somme de son temps d'attente et de son temps de service, soit $T = T_q + S$.

Pour la loi de T, faire la démonstration comme celle de la question précédente. On doit aboutir au fait que T est de loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.
Ainsi $W = \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_q) + \mathbb{E}(S) = \frac{\rho}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

Problem 1-5
Retrouver la relation entre L_q et W_q et celle entre L et W (formule de Little).

Proof: On a $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho\frac{\rho}{1-\rho} = \lambda W_q$.
De même $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \lambda W$.

Problem 2
(Serveur et miroir). On dispose de deux serveurs Web : un serveur principal et un serveur miroir. Les requêtes arrivent à un routeur qui doit essayer de répartir le travail entre le serveur principal ou son miroir, qui est supposé moins performent. Le routeur ne connaissant pas la charge respective des deux serveurs, il décide d'envoyer chaque requêt eau serveur principal ave probabilité p et au serveur miroir avec probabilité 1-p. On cherche à optimiser le choix de p. On suppose que les arrivées suivent un processus de Poisson d'intensité λ. Les temps de service des serveurs sont de lois exponentielles de paramètres respectifs μ pour le serveur principal et ν pour le serveur miroir.

Proof:

Problem 2-1
[10 pts] Montrer que les arrivées des paquets dans les files du seveur principal et de son miroir sont des processus de Poisson d'intensités respectives $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$

Proof: Définissons les termes suivant :
λ_1 : taux d'arrivée au serveur principal ; λ_2 : taux d'arrivée au serveur miroir
N^1 : processus d'arrivée du serveur principal; N^2 : processus d'arrivée du serveur miroir
$N = N^1 + N^2$: processus d'arrivée au niveau du routeur d'intensité λ.

En se servant de la formule des probabilités totales on a :
$\mathbb{P}(N_t^1 = k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N_t^1 = k | N_t = n)\mathbb{P}(N_t = n)$ et $\mathbb{P}(N_t^2 = q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N_t^2 = q | N_t = n)\mathbb{P}(N_t = n)$

En effet $\mathbb{P}(N_t^1 = k|N_t = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ car $\{N_t^1 = k|N_t = n\} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

De même $\mathbb{P}(N_t^2 = q|N_t = n) = C_n^q (1-p)^q p^{n-q}$ car $\{N_t^2 = q|N_t = n\} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,1-p)$.

Enfin $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.

On a donc $\mathbb{P}(N_t^1 = k) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum\limits_{n\geq k} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

$\mathbb{P}(N_t^1 = k) = \sum\limits_{n\geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum\limits_{n\geq k} \frac{1}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{k!n!} p^k (1-p)^n (\lambda t)^{n+k} e^{-\lambda t}$.

Ainsi $\mathbb{P}(N_t^1 = k) = \frac{(p\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!} ((1-p)\lambda t)^n = \frac{(p\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} e^{(1-p)\lambda t} = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}$.

D'où $N_t^1 \rightsquigarrow \mathcal{P}(p\lambda)$. On en déduit de même que $N_t^2 \rightsquigarrow \mathcal{P}((1-p)\lambda)$

Problem 2-2
[10pts] Quelle sont les conditions de stabilité du système?

Proof: Serveur Principal : $\frac{p\lambda}{\mu} < 1$ et Serveur Miroir : $\frac{(1-p)\lambda}{\nu} < 1$

Problem 2-3
[10pts] Calculer le nombre de requêtes dans le serveur principal et dans le serveur miroir à l'état stationnaire.

Proof: Soient $\bar{N^1}$ et $\bar{N^2}$ ces nombres de requêtes respectifs dans le serveur principal et dans le serveur miroir.

On a $\bar{N^1} = \frac{\frac{p\lambda}{\mu}}{1-\frac{p\lambda}{\mu}}$ et $\bar{N^2} = \frac{\frac{(1-p)\lambda}{\nu}}{1-\frac{(1-p)\lambda}{\nu}}$

Problem 2-4
[10pts] Déterminer le temps de réponse moyen dans le système global

Proof: Formule de Little :
pour le serveur principal le temps moyen t_P est donné par $\frac{\bar{N^1}}{p\lambda}$;
pour le serveur miroir le temps moyen t_M est donné par $\frac{\bar{N^2}}{(1-p)\lambda}$.

Donc le temps moyen global dans le système est le temps probable moyen d'une requête et donné par $\bar{t} = pt_P + (1-p)t_M$

Problem 2-5
Déterminer la valeur optimale de p

Proof: La valeur optimale de p est celle qui minimise le temps de réponse moyen global dans le système. Il suffit donc de minimiser la fonction $\bar{t} = f(p)$ avec $p \in [0,1]$

Blague : je ne vais pas le faire pour vous à moins qu'une coco le demande.

Bon bref le p^* doit vérifier l'équation $\frac{\mu}{\nu} = \frac{(\mu - p^*\lambda)^2}{(\nu-(1-p^*)\lambda)^2}$.

Problem 3

Soit la chaîne de Markov définie par la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des états est $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Problem 3-1

Classifier complètement la chaîne et ses états. (graphe de transition, classes de communication, états transitoires, états récurrents, graphe réduit, états absorbants, etc.)

Proof:

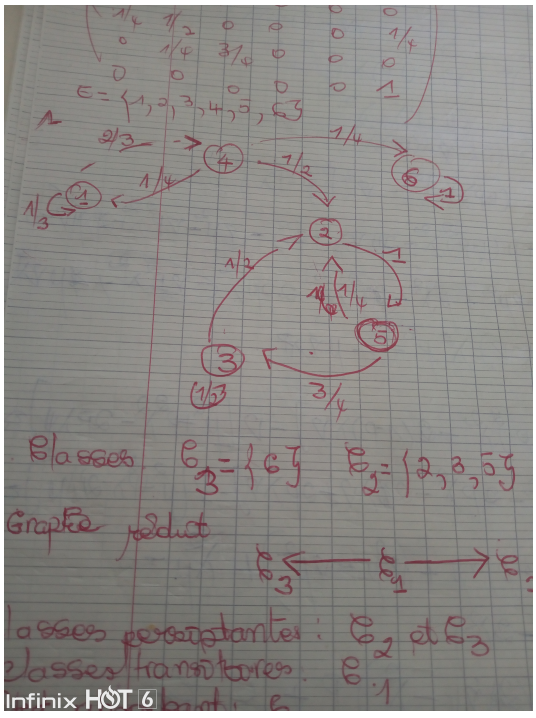
Classes de communication : $\mathcal{C}_1 = \{1,4\}; \mathcal{C}_2 = \{2,3,5\}; \mathcal{C}_3 = \{6\}$.

$\mathcal{C}_3 = \{6\}$ est une classe persistante composée d'un seul état donc $\{6\}$ est un état absorbant.

$\mathcal{C}_2 = \{2,3,5\}$ est une classe persistante ou récurrente donc tous ses états sont récurrents.

$\mathcal{C}_1 = \{1,4\}$ est une classe transitoire donc ses états sont également transitoires.

Proof:



Problem 3-2

Expliquer pourquoi visiter l'état 5 une infinité de fois partant de l'état transitoire i équivaut à rentrer dans l'ensemble $A = \{2, 3, 5\}$ partant de l'état transitoire i.

Proof: Tous les états de la classe $\mathcal{C}_2 = \{2, 3, 5\}$ étant récurrents alors tous les états de cette peuvent être revisités au moins une fois de plus après leur premier passage. Or toute visite de l'état 5 passse par une trasition vers l'état 2, lequel transite immédiatement vers l'état 5. La classe étant récurrente, l'état 5 sera visité une infinité de fois. CQFD.

Problem 3-3
Utiliser la question 2) pour:

Problem 3-3-a
déterminer la probabilité que la chaîne visite l'état 5 une infinité de fois partant de l'état 1;

Proof: Soit $h_1^{\mathcal{C}_2}$ cette probabilité. On a $h_1^{\mathcal{C}_2} = \sum_{y \in E} p(1, y) h_y^{\mathcal{C}_2}$.
Ainsi il convient de résoudre le système ci-dessous :

$$\begin{cases} h_1^{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{3} h_1^{\mathcal{C}_2} + \frac{2}{3} h_4^{\mathcal{C}_2} & (1) \\ h_4^{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{4} h_1^{\mathcal{C}_2} + \frac{1}{2} h_2^{\mathcal{C}_2} & (2) \end{cases}$$

Les autres équations ne portent pas d'intérêt car $h_2^{\mathcal{C}_2} = h_3^{\mathcal{C}_2} = h_5^{\mathcal{C}_2} = 1$ et $h_6^{\mathcal{C}_2} = 0$.

En résolvant le système précédent on obtient que $h_1^{\mathcal{C}_2} = \frac{2}{3}$.

Problem 3-3-b
déterminer la probabilité que la chaîne visite l'état 6 partant de l'état 4;

Proof: En écrivant $h_4^6 = \sum_{y \in E} p(4, y) h_y^6$, on montre que $h_4^6 = \frac{1}{4} h_1^6 + \frac{1}{2} h_2^6 + \frac{1}{4} h_6^6 = \frac{1}{4} h_1^6 + \frac{1}{4}$.
On a $h_1^6 = \frac{1}{3} h_1^6 + \frac{2}{3} h_4^6$ donc $h_1^6 = h_4^6$ D'où $h_4^6 = \frac{1}{3}$.

Problem 3-3-c
déterminer le nombre moyen de transitions avant de rentrer dans l'ensemble B = {2; 3; 5; 6} partant de l'état 1

Proof: Il faut utiliser la formule suivante $k_1^B = 1 + \sum_{y \in E} p(1, y) k_y^B$.
En déroulant le système issu de cette équation on montre que $k_1^B \simeq 2$.

Problem 4
voir l' exercice 3.1.4 (Enoncé Pg 33 et correction Pg 131) dans le livre M2-exo dans le gbaki.